

Αναδοτική Γεωμετρία

18/5/17

Τι παριστάνει η εξίσωση.

$$Ax^2 + 2Bxy + \Gamma y^2 + 2\Delta x + 2\Gamma y + \Sigma = 0$$

$(A, B, \Gamma) \neq (0, 0, 0)$.

Τετραγωνικές μορφές

Ορισμός: Έστω V : διανυσματικός χώρος εφοδιασμένος με εσθινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$, καθώς με τετραγωνική μορφή στο V κάθε συνάρτηση $q: V \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε αν $\{e_1, \dots, e_n\}$ είναι ορθοκανονική βάση του V και $x = \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i$ τότε $q(x) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$ όπου (a_{ij}) είναι $n \times n$ πραγματικός συμμετρικός πίνακας.

Παράδειγμα: $V = \mathbb{R}^2$

$$q(\vec{x}) = q(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$$

$$(x, y) = x e_1 + y e_2$$

$$x_1 = x, x_2 = y$$

Ο πίνακας (a_{ij}) καλείται πίνακας της τετραγωνικής μορφής q ως προς τη βάση $\{e_1, \dots, e_n\}$. $q(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + \Gamma y^2$ είναι $\circ$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & \Gamma \end{pmatrix}$$

$$A = (a_{ij}) \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$q(\vec{x}) = \sum a_{ij} x_i x_j = \underset{n \times n}{x^T} \underset{n \times n}{A} \underset{n \times 1}{x}$$

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i$$

Έστω $\{e_1, \dots, e_n\}$ άλλη βάση $\vec{x} = \sum_{i=1}^n y_i \cdot e_i$. $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} =$

$$\boxed{X = PY}$$

όπου P ο πίνακας μεταβάλλει από τη μορφή B σε άλλη.

$$Q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x} = (P\vec{y})^T A (P\vec{y}) = \vec{y}^T (P^T A P) \vec{y}$$

Ο πίνακας B ~~είναι~~ Q όπου νέα βάση είναι $B = P^T A P$

Διαφοροποίηση συμμετρικών Πινάκων

Θεώρημα: Έστω A ~~πινάκας~~ πραγματικός, συμμετρικός πίνακας τότε:

- i) όλες οι ιδιοτιμές $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ είναι πραγματικές.
- ii) υπάρχει ορθογώνιος ~~πινάκας~~ P π.ω $P^{-1} A P =$

$$P^T A P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ & διαγώνιος.}$$

$$\begin{aligned} Q(\vec{x}) &= Q\left(\sum_{i=1}^n y_i \Sigma_i\right) = \vec{y}^T (P^T A P) \vec{y} = \vec{y}^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \vec{y} = \\ &= (y_1 \dots y_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \\ &= (y_1 \dots y_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1 \\ \vdots \\ \lambda_n y_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Συμπέρασμα:

$$Q(\vec{x}) = Q\left(\sum_{i=1}^n y_i \Sigma_i\right) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

Θεώρημα : Έστω $q: V \rightarrow \mathbb{R}$

τετραγωνική μορφή, και $q(x) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$
 όπου $\vec{x} = \sum x_i e_i$ $\{e_1, \dots, e_n\}$
 ορθονόρμηση. Τότε υπάρχει ορθ. βάση $\{e'_1, \dots, e'_n\}$
 τέτοια ώστε $q(\vec{x}) = q(\sum_{i=1}^n x'_i e'_i) =$
 $= \lambda_1 (x'_1)^2 + \dots + \lambda_n (x'_n)^2$, όπου $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ είναι ιδιοτιμές
 του A . Επίπλέον $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ όπου P

Είναι ο πίνακας μεταβάσεων.

$$\boxed{\begin{aligned} &\Gamma_1 \text{ παριστάνει } Ax^2 + 2Bxy + \Gamma y^2 + \Delta x + 2Ey + \Sigma = 0 \\ &[(A, B, \Gamma) \neq (0, 0, 0)] \end{aligned}}$$

1^η περίπτωση $\Delta = E = 0$

$A \neq 0$ εξίσωση τότε $Ax^2 + 2Bxy + \Gamma y^2 + \Sigma = 0$ (*)
 $(x, y) = x' \vec{e}_1' + y' \vec{e}_2'$

$$(*) \Leftrightarrow \lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 + \Sigma = 0 \quad \text{όπου } \lambda_1, \lambda_2$$

είναι οι ιδιοτιμές του
 πίνακα $\begin{pmatrix} A & B \\ B & \Gamma \end{pmatrix}$

Παράδειγμα (στη 1^η περίπτωση)

Να μελετηθεί η εξίσωση $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 0$
 (ή αλλιώς να αναχθεί η εξίσωση αυτή στους
 άξονες της).

Λύση: Ο πίνακας της τετραγωνικής

μορφής $q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $q(x, y) = 5x^2 - 6xy + 5y^2$

είναι ο $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

† y^2 αντεθέτως

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 16$$

Άρα το χαρπολ είναι $\lambda^2 - 10\lambda + 16$ δηλ

$$(\lambda - 2)(\lambda - 8)$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι $\lambda_1 = 2$ και $\lambda_2 = 8$

Ο ιδιοχώρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή

$$\lambda_1 = 2 \quad V(\lambda_1) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} / A - \lambda_1 I_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(A - \lambda_1 I_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y$$

$$V(\lambda_1) = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} < >$$

ο χώρος που παράγεται από v_1

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ είναι ορθογ. βάση του } V(\lambda_1)$$

Ο ιδιοχώρος V που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_2 είναι

$$V(\lambda_2) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} / (A - \lambda_2 I_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

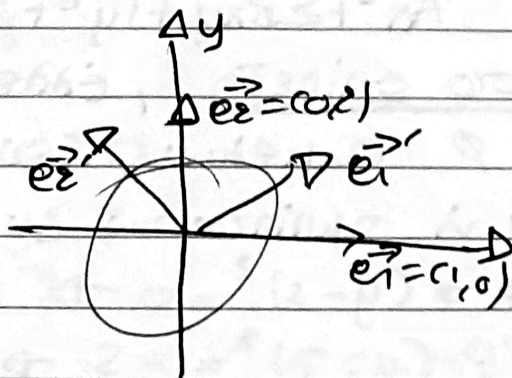
$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} / x + y = 0 \right\}$$

$$= \left\{ y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} / y \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ είναι ορθό 벡터 του $V(\lambda_2)$

Η νέα βάση του $\mathbb{R}^2$ είναι η $\{\vec{e}_1', \vec{e}_2'\}$
 $\vec{e}_1' = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $\vec{e}_2' = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$



$$(x, y) = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = x'\vec{e}'_1 + y'\vec{e}'_2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$2(x, y) = 5x^2 - 6xy + 5y^2 = \lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 = 2(x')^2 + 8(y')^2$$

$$\text{Αρα } 5x^2 - 6xy + 5y^2 = 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x')^2}{2^2} + \frac{8(y')^2}{8} = 1$$

Απάντηση: Παριστάνει έλλειψη με άξονες 2, 1

Αν μας δώσουν να μελετηθεί η $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2\Delta x + 2\epsilon y + 3 = 0$ τότε θα μελετήσουμε αυτό μόνο $\uparrow$

$$\lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 + 2\Delta x' + 2\epsilon y' + 2 = 0$$

$$\lambda_1 (\underbrace{x' - \alpha}_{x''})^2 + \lambda_2 (\underbrace{y' - \beta}_{y''})^2$$

Θεώρημα (απάντηση στο αρχικό ερώτημα)
Η εξίσωση $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2\Delta x + 2\epsilon y + 3 = 0$ παριστάνει στο επίπεδο, έλλειψη, υπερβολή, ή παραβολή, $\emptyset$ σημείων, τριών τεμνόμενων Παράλληλων ή συμπίντων ευθειών.

$$3(x-1)^2 + 7(y-5)^2 = 0 \rightarrow (1, 5)$$

$$3x^2 + 8(y-7)^2 = -5 \rightarrow \emptyset$$

$$x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y) = 0$$

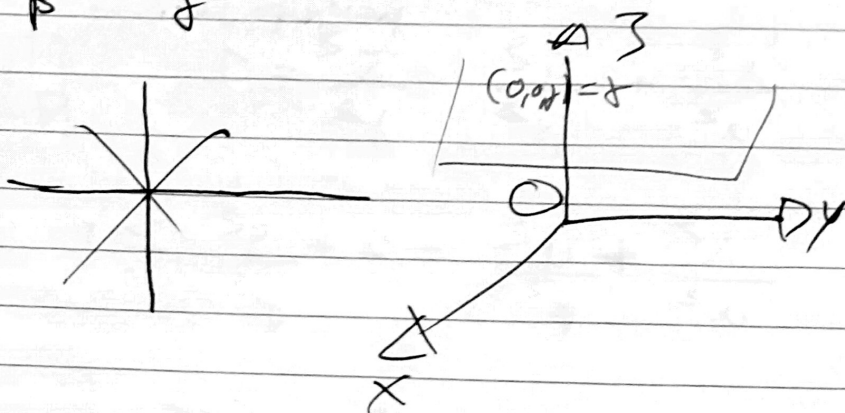
Δευτεροβάθμια Εξίσωση στο Χώρο

Γενική μορφή: $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0$

Πρόβλημα Τι παρουσιάζει;

Επιφάνειες 2^{ου} βαθμού

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$ → είναι ελλειψοειδές.



Συμπέρασμα: ως προς το 0, ως προς τα επίπεδα συστήσεων και ως προς τους άξονες συστήσεων

$$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} \geq \frac{x^2}{a^2}, \frac{y^2}{\beta^2}, \frac{z^2}{\gamma^2} \Rightarrow$$

$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$$

$$|y| \leq \beta \Leftrightarrow -\beta \leq y \leq \beta$$

$$|z| \leq \gamma \Leftrightarrow -\gamma \leq z \leq \gamma$$

Τομές της επιφάνειας με επίπεδα $\perp$ OZ
(n) : $z = c$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1 \\ z = c \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \left(\frac{c}{j}\right)^2 \\ z=c \end{cases}$$

$$\text{Av } -j < c < j$$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2(1-\frac{c^2}{j^2})} + \frac{y^2}{b^2(1-\frac{c^2}{j^2})} = 1 \end{cases}$$

$$2) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{j^2} = 1 \quad \text{μολοχικά υπερβ.} \quad \begin{matrix} \text{Τι παριστάει} \\ \nabla \end{matrix}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{z^2}{j^2} \geq 1 \quad \text{δεν τέμνει άξονα } z,$$

Τομή με επίπεδα $z=c$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{c^2}{j^2} \\ z=c \end{cases}$$

Τομές με επίπεδα $y=c$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{j^2} = 1 - \frac{c^2}{b^2} \\ y=c \end{cases}$$

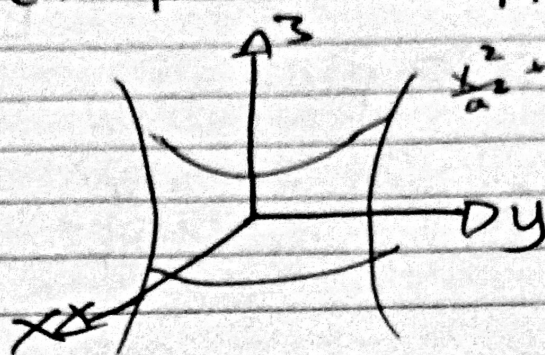
$$\text{Av } c = \pm b$$

τοτε

$$\begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{z}{j} = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{x}{a} + \frac{z}{j} = 0 \\ z=c \end{cases}$$

Av $C \neq \pm B$

Υπέρβλες



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Γνωρίζω
υπερβολές.